3) الطريقة الطبيعية (طريقة الأحداثيات المماسية والناظمية)
(t - n)

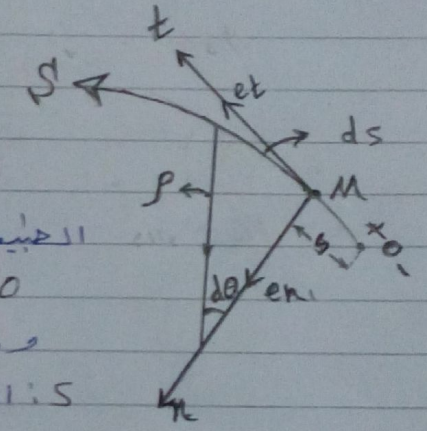
المحور (t): مماس للمسار S
المحور (n): عامودي على المسار باتجاه التقعر.

S: تقتبر مسار الحركة وهو محور الأحداثيات الطبيعية وينطبق على المسار.

O: نقطة مرجعية على المسار ما قبلها سالب وما بعدها موجب.

S: الفاصلة المنحنية، أي المسافة التي تفصل بين OM

ds: الفاصلة التي يقطعها المتحرك خلال فاصل زمني dt



dθ: زاوية التلامس.

$S = f(t)$

ω: السرعة الزاوية. (rad.s⁻¹)

السرعة:

$$V_M = \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{\rho . d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

ملاحظة:
مشتق شعاع الواحدة يساوي $\dot{\theta}$ لـ شعاع الواحدة العمود عليه.

$V_M = \rho . \omega = \rho . \dot{\theta} = \dot{S}$ كمية عددية

$\vec{V_M} = V_M . \vec{et} = \dot{S} . \vec{et}$ كمية شعاعية

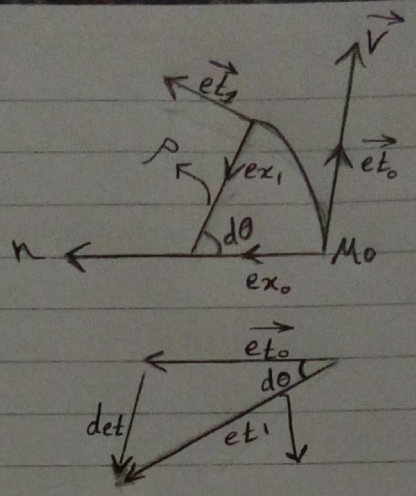
$$\vec{\dot{e}_t} = \frac{d\vec{e_t}}{dt} = \frac{\vec{e_{t_1}} - \vec{e_{t_0}}}{dt}$$

$$d\vec{e_t} = \vec{e_{t_1}} - \vec{e_{t_0}} \Rightarrow$$

$$\vec{e_{t_1}} = \vec{e_{t_0}} + d\vec{e_t}$$

كمية عددية $|d\vec{e_t}| = |\vec{e_t}| \cdot d\theta = d\theta$

كمية متجهة $\vec{de_t} = d\theta \cdot \vec{e_n}$



$$\dot{e}_t = \frac{d\theta \cdot e_n}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{e_n} = w \cdot \vec{e_n}$$

$$e_n = -\dot{\theta} \cdot \vec{e_t} = -w \cdot \vec{e_t}$$

أشارة (-) لأنه de_t عكس أشارة المحور e_t

ملاحظة
مشتق شعاع الواحدة هو السرعة الزاوية ضرب شعاع الواحدة العمودي عليه

$$\vec{A_M} = V_M = \frac{d(V_M \cdot \vec{e_t})}{dt} = \dot{V}_M \cdot \vec{e_t} = \dot{s} \cdot \vec{e_t}$$

$$\vec{A_M} = \dot{V}_M \cdot \vec{e_t} + V_M \cdot \vec{\dot{e}_t}$$

$$\vec{A_M} = \dot{V}_M \cdot \vec{e_t} + V_M \cdot w \cdot \vec{e_n}$$

نشاري مماسي

$$\dot{\alpha} = w = \frac{V_M}{\rho}$$ نكن

$$\vec{A_M} = a_M^t \cdot \vec{e_t} + V_M \cdot \frac{V_M}{\rho} \cdot \vec{e_n}$$

التسارع:

$\vec{\dot{e}_t} = \dot{\alpha} \cdot \vec{e_n} = w \cdot \vec{e_n}$ ونكن

$V = \rho \cdot w$

$a_M^n = \frac{V_M^2}{\rho}$ نكن

$\vec{A_M} = a_t \cdot \vec{e_t} + a_n \cdot \vec{e_n}$

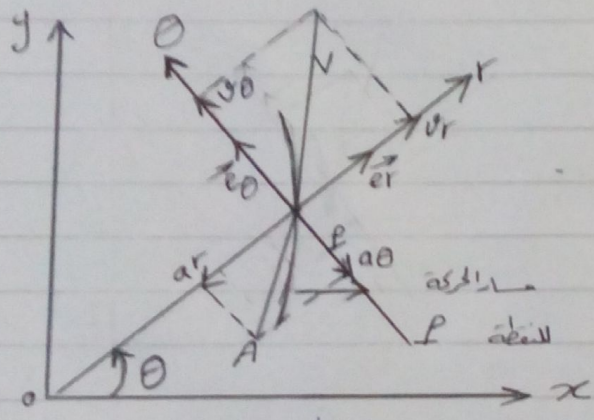
$a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2}$ ..... ②

$a_n^n = \frac{v^2}{\rho} = \rho \cdot \omega^2 = v \cdot \omega$

$a_M^t = \dot{v}_M = \ddot{s} = \rho \cdot \xi$ أو $\rho \cdot \alpha$ حيث $\alpha = \xi = \ddot{\theta}$

بالعودة إلى ② أيضاً

$a_M = \rho \sqrt{\omega^4 + \xi^2}$ $\rho = r$



4) طريقة الإحداثيات القطبية:
هي عبارة عن محور r ذو نقطة مرجعية O ويمر في ρ والمحور الآخر θ عامودي على r. ثم نقوم بأخذ أسنة الواحدة $\vec{e_\theta}$ ، $\vec{e_r}$

A : الشعاع A باتجاه القمر

$\vec{e_r}$: شعاع الواحدة على المحور r / $\vec{e_\theta}$: شعاع الواحدة على المحور θ

ملاحظة: هذه الطريقة حالة خاصة في الإحداثيات المستوية (x, y)

تذكرة: $\vec{e_r} = \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta}$ ، $\vec{e_\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{e_r}$

لتحديد مكان المتحرك يجب معرفة $r = f_1(t)$ و $\theta = f_2(t)$ لحول النقطة المتحركة

السرعة:

$\vec{r_M} = r \cdot \vec{e_r}$

$\vec{V_M} = \dot{\vec{r}_M} = \frac{d(r \cdot \vec{e_r})}{dt} \Rightarrow \vec{V_M} = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r \cdot \dot{\vec{e_r}}$

$\vec{V_M} = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta}$

بما أن: $\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta}$

بما أن: $V_r = \dot{r}$ ، $V_\theta = r \cdot \dot{\theta}$

$\vec{V_M} = V_r \cdot \vec{e_r} + V_\theta \cdot \vec{e_\theta}$ $\Rightarrow \mathcal{E} V_M = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$ } ⟹ خذ

التسارع.

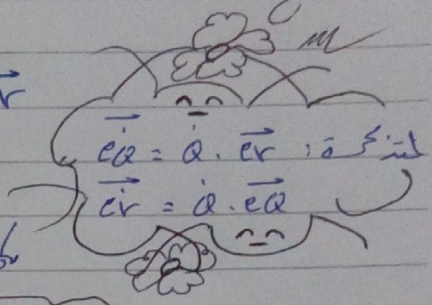
$$\vec{A_M} = \frac{d\vec{V_M}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta})}{dt}$$

$$\vec{A_M} = \ddot{r}\cdot\vec{e_r} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e_\theta} - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\vec{e_r}$$

$$\vec{A_M} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

حيث: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ، $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

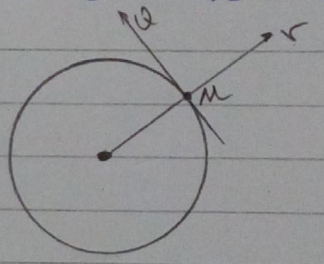
$$\vec{A_M} = a_r\cdot\vec{e_r} + a_\theta\cdot\vec{e_\theta} \quad , \quad (a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2})$$



ملاحظة: بالعودة إلى الرسمة السابقة فإن الزاوية المنفرجة بين شعاع السرعة (V) وشعاع التسارع (A) في هذه الحالة تكون الحركة متباطئة.

★: أما إذا كانت الزاوية الحادة بين شعاع السرعة (V) وشعاع التسارع (A) في هذه الحالة تكون الحركة متسارعة.

حالة خاصة بالحركة الدورانية.



$$V_r = 0 \; , \; V_\theta = R\omega \Rightarrow V = R\cdot\omega$$

$$a_r = 0 - R\omega^2 \; , \; a_\theta = R\varepsilon + 0$$

الحالات الخاصة لحركة الجسم.

★: يوجد جسم يترك فتكون حركته أما مستقيمة أو دائرية، منتظمة ..... الخ.
شعاع التسارع يحدد طبيعة حركة أي جسم أي التسارع هو المؤشر الأساسي لطبيعة حركة أي جسم.

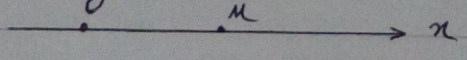
الحالة الأولى: التسارع الكلي = لشعاع الحقيقي.

$$a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \ldots (1) \quad , \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0 \ldots (2) \quad , \quad \vec{a} = 0$$

في (1) $V = const \Leftarrow dV = 0 \Leftarrow a_t = 0$

في (2) $\rho = \infty \Leftarrow a_n = \frac{عدد}{\infty} \Leftarrow a_n = 0$

$\Leftarrow$ الحركة مستقيمة منتظمة



بكاملة العلاقة $V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V \cdot dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = V \int_{0}^{t} dt \Leftrightarrow x - V t = x_0$$

ملاحظة: الحركة المستقيمة المنتظمة هي الحالة الوحيدة التي تكون فيها التسارع مساوي الصفر

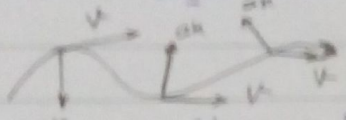
الحالة الثانية: التسارع المماسي مساوي الصفر

$a_n \neq 0$ و $a_t = 0$

$a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \ldots ①$ ، $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0 \ldots ②$

في ① $a_t = 0 \Leftarrow dV = 0 \Leftarrow V = const$ الحركة منتظمة

في ② $a_n \neq 0 \Leftarrow \rho$ موجود $\Leftarrow$



ملاحظة: إذا كانت $\rho = const$ تكون الحركة الدائرية منتظمة

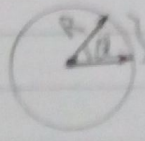
بكاملة العلاقة $V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = V \cdot dt$

$$\int_{s_0}^{s} ds = V \int_{0}^{t} dt \Leftrightarrow s - V t = s_0$$

هذه المعادلة تمثل طول القوس

حركة دائرية منتظمة $\rho = R = const$ حالة خاصة.

$S = R \cdot \theta = \omega \cdot R \cdot t + R \cdot \theta_0 \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$



الحالة الثالثة: التسارع المماسي مساوي الصفر.

$a_n = 0$ ، $a_t \neq 0$

$a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0 \ldots ①$ متغيرة / $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0 \ldots ②$

في ① V متغيرة $\Leftarrow a_t \neq 0$

في ② $\rho = \infty \Leftarrow a_n = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \Leftarrow a_n = 0$ } الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

$a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0 \Rightarrow dt = \frac{dV}{dt} \ldots ① \; ، \; V = \frac{dx}{dt} \ldots ③$

بتعويض ① في ③ $\Leftarrow V = \frac{dx}{\frac{dV}{dt}} \Rightarrow V \cdot dV = a_t \cdot dx$

التسارع المماسي مساوي التسارع الكلي لأنه $a_n = 0$

حالة خاصة: $a_t = const$ حركة متغيرة بانتظام.

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a_t \int_{x_0}^{x} dx \;,\; \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a_t (x - x_0)$$

$$\{ v^2 - v_0^2 = 2a_t (x - x_0) \}$$

Δx

من (1): $\int_{v_0}^{v} dv = a_t \int_{0}^{t} dt \Rightarrow \{ v = a_t \cdot t + v_0 \}$

من (3): $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt = \int_{0}^{t} (a \cdot t + v_0)\,dt$

$\int dx = 0 \int t \cdot dt + v_0 \int dt$ $\quad$ لأن $a = a_t$

$$\{ x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \}$$

الحالة الرابعة: التسارع المماسي والناظمي كلاهما متغيرات. $a_n \neq 0 \;,\; a_t \neq 0$

حركة متغيرة متغيرة. $a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0 \ldots (1) \;,\; a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0 \ldots (2)$

بدل x نضع S ← حركة متغيرة متغيرة بانتظام $a_t = const$

$$v \cdot dv = a_t \, ds$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_t (s - s_0) \Rightarrow \{ v^2 - v^2 = 2a_t (\Delta s) \}$$

لا نضع التسارع الكلي نضع التسارع المماسي فقط

$$v = a_t \cdot t + v_0$$

$$\{ s = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 + v_0 t + s_0 \} \quad \bigstar$$

$\rho = R = Const \;,\; a_t = const$ $\quad$ حالات خاصة:

حركة دائرية متغيرة بانتظام

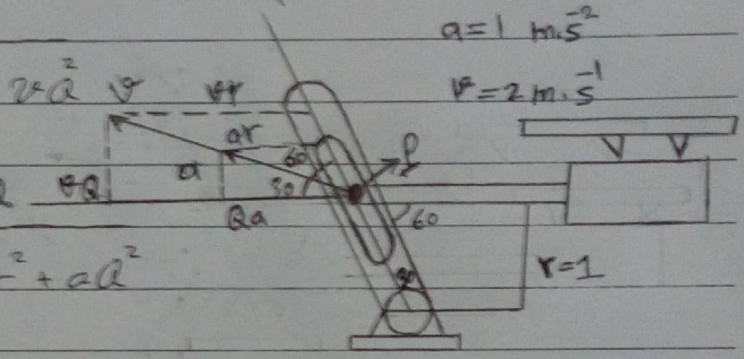
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon (\theta - \theta_0)$ $\quad$ $\varepsilon = \theta^{\circ\circ} \;,\; a_t = \varepsilon \cdot R$ التسارع الزاوي

$\omega = \varepsilon t + \omega_0$

من المعادلة ★ بتبديل s و θ وكل

$$\{ \theta = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \}$$

10/96 يتحرك ذراع آسعوانة هيدروليكية بسرعة خطية ثابتة مقدارها $v = 2\ m.s^{-1}$ ويتسارع $a = 1\ m/s^{-2}$ في هذه اللحظة على أساس نحو ما هو مبين في الشكل والزاوية $\theta = 30°$ الذراع المشقوقة حول المفصل O. المطلوب: حساب القيم العددية للمتجهات التالية $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$



$v_r = \dot{r}$

$v_\theta = r.\dot{\theta}$ $\Rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$a_r = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ $\Rightarrow a\sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

$\dot{r} = v_r = v.\cos 60 \Rightarrow v = 1\ m.s^{-1}$

$v_\theta = v.\cos 30 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1,72\ m.s^{-1}$

$r = \frac{1}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ m$

$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2} = 1,5\ rad.s^{-1}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a\cos 60 = \ddot{r} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \ddot{r} - 2,5$

$\Rightarrow \ddot{r} = 3\ m.s^{-2}$

حيث $a_r = a\cos 60$

$a_\theta = r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$a\cos 30 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \ddot{\theta} + 2(1 \times 1,5)$

حيث $a_\theta = a\cos 30$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \ddot{\theta} + 3 \Rightarrow \ddot{\theta} = 3\ rad.s^{-2}$